1. Racionální funkce od $\sin x, \cos x$, se symetrií vhodnou pro použití substituce $t = \operatorname{tg} x$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)(1+2\sin x\cos x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{2t}{1+t^2})^2} \\
&= \int \frac{(1+t^2)^2}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int 1 - 4\frac{t^3+t^2+t}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t = t - 4I_0
\end{aligned}
$$

Pro spočítání I_0 už teď můžeme použít rozklad na parciální zlomky, ten vyjde:

$$
\frac{t^3+t^2+t}{(1+t)^4} = \frac{1}{1+t} - \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{(1+t)^3} - \frac{1}{(1+t)^4}.
$$

Odtud už lehce

$$
I_0 = \log|1+t| + \frac{2}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+t)^3}
$$

a konečně

$$
I = \operatorname{tg} x - 4\log|1+\operatorname{tg} x| - \frac{8}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{4}{(1+\operatorname{tg} x)^2} - \frac{4}{3(1+\operatorname{tg} x)^3} + C.
$$

Funkce $f(x)$ je definovaná tam, kde je definovaná $\operatorname{tg} x$ (tedy na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$) a kde zároveň $\sin 2x \neq -1$, tedy $2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ a konečně $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Maximální intervaly mají tedy tvar $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ a $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi)$ (je snadné si uvědomit, že získaná primitivní funkce je definovaná na totožných intervalech jako funkce f).

2. Očividně je $f(x)$ definovaná, spojitá a diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$.

   a) První derivace:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x^2} + \left(x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)(\log(1+x^2)-1) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)\frac{2x}{1+x^2} \\
&= x\operatorname{arctg} x \log(1+x^2)
\end{aligned}
$$

Funkce $\log(1+x^2)$ je vždy nezáporná a funkce $x\operatorname{arctg} x$ zrovna tak, obě funkce jsou rovny nule jen v bodě $x=0$, proto je $f(x)$ rostoucí na celém $\mathbb{R}$.

b) Víme, že $\operatorname{arctg} x \sim x$, $x \to 0$ (například použitím standardní limity $\frac{\sin x}{x}$) a $\log(1+x^2) \sim x^2$, $x \to 0$ (například použitím standardní limity $\frac{\log(1+x)}{x}$). Proto $f'(x) \sim x^4$, $x \to 0$ a tedy $a = 4$.

c) Víme, že $\operatorname{arctg} x = O(1)$, $x \to +\infty$ a tedy $\operatorname{arctg} x = o(x^\varepsilon)$, $x \to +\infty$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. Podobně použitím škálovacích limit víme, že $\log(1+x^2) = o(x^\varepsilon)$, $x \to +\infty$, pro libovolné $\varepsilon > 0$. Dohromady tak $f'(x) = o(x^{1+\delta})$, pro libovolné $\delta > 0$ a tedy $b \in (1, +\infty)$.

d) Využitím předchozího snadno vidíme, že takové případné $c \in \mathbb{R}$ nemůže být větší než jedna. Zároveň ale pro $c = 1$ máme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x^c} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x \log(1+x^2) = +\infty$$

a stejný výsledek dostaneme pro libovolné $c < 1$. Proto neexistuje žádné $c \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f'(x) \sim x^c$, $x \to +\infty$.